Números complejos y funciones complejas elementales

Estructura de la lección y objetivos

La lección está estructurada en tres partes.

Primera parte: Álgebra y operaciones básicas con números complejos

Además de dar las definiciones básicas y explicar la terminología, a veces confusa, que se usa para hablar de números complejos, comprobaremos lo útiles que son las coordenadas polares para multiplicar números complejos. Al terminar esta lección serás capaz de ver dónde está el error en expresiones como:

$$-1 = i^2 = i\,i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

$$i = (-1)^{1/2} = [(-1)^3]^{1/2} = (-1)^{3/2} = i^3 = -i$$

Segunda parte: Sucesiones de números complejos

Daremos las definiciones básicas de convergencia de una sucesión de números complejos y veremos que el estudio de una sucesión de números complejos es equivalente a estudiar dos sucesiones de números reales. Veremos cómo las sucesiones de números complejos permiten definir con facilidad los conjuntos fractales de Julia y de Mandelbrot.

Tercera parte: Funciones elementales complejas

Daremos las definiciones básicas de continuidad y derivabilidad de funciones complejas. Introduciremos la función exponencial compleja y comprobaremos que dicha función contiene a las funciones elementales en el sentido de que todas pueden definirse con facilidad a partir de ella.

Para seguir con comodidad esta lección conviene que repases:

- Las funciones trigonométricas reales y sus “inversas”: definición y propiedades básicas. En particular, la función arcotangente.
- El concepto de límite de una sucesión de números reales. El llamado “criterio del zapato” para la indeterminación 1^∞. La relación entre límite funcional y límite secuencial.

Objetivos

- Aprender a trabajar con números complejos en forma cartesiana y en forma polar. Calcular raíces complejas.
- Conocer las funciones elementales complejas. Calcular logaritmos y potencias complejos.

El cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos

Consideremos en el conjunto $\mathbb{R}^2$ las operaciones de adición y producto definidas por

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de las operaciones así definidas. El elemento neutro de la suma es $(0,0)$ y $(1,0)$ es la unidad del producto. Además, $(-a,-b)$ es el opuesto de (a,b), y todo $(a,b)\neq(0,0)$ tiene inverso

$$(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$$

Todas estas propiedades se resumen diciendo que $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ es un *cuerpo*. Dicho cuerpo se representa simbólicamente por $\mathbb{C}$ y sus elementos se llaman **números complejos**.

A los elementos de $\mathbb{R}^2$ se les llama de distintas formas:

- *vectores* si se está considerando la estructura de espacio vectorial.
- *puntos* si fijamos la atención en la estructura topológica o afín.
- *pares ordenados* cuando estamos pensando en $\mathbb{R}^2$ como conjunto sin ninguna estructura particular.
- *números complejos* cuando se considera la estructura de cuerpo antes definida.

Forma cartesiana de un número complejo

El símbolo usual (a,b) para representar pares ordenados no es conveniente para representar el número complejo (a,b). Representaremos los números complejos con un simbolismo más apropiado. Para ello, observa que:

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0) \qquad (a,0)(b,0)=(ab,0)$$

Por esta razón, en las operaciones con números complejos podemos sustituir los complejos del tipo $(a,0)$ por el número real a. Es decir, hacemos la identificación $(a,0)=a$ y consideramos $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

Definiendo $i=(0,1)$ podemos escribir

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+bi$$

$a+bi$ es la expresión cartesiana del número complejo (a,b). Se dice que a es la **parte real** y b la **parte imaginaria** de $a+ib$. Teniendo en cuenta que $i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$ es muy fácil de recordar el producto pues

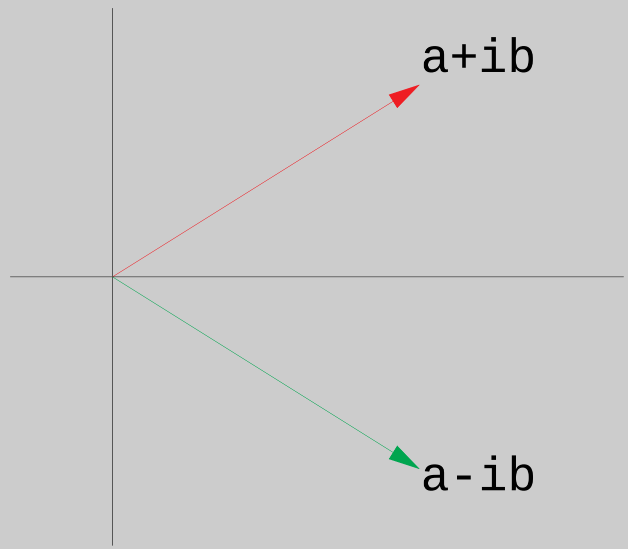
$$(a+ib)(c+id)=ac+i^2bd+i(ad+bc)=ac-bd+i(ad+bc)$$

No hay un orden en $\mathbb{C}$ compatible con la estructura algebraica

Al ampliar $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ ganamos mucho pero también perdemos algo. Te recuerdo que $\mathbb{R}$ tiene dos estructuras: la algebraica y la de orden. Ambas estructuras están armoniosamente relacionadas. Pues bien, en $\mathbb{C}$ no hay nada parecido. Podemos definir relaciones de orden en $\mathbb{C}$, pero no hay ninguna de ellas que sea *compatible* con la estructura algebraica.

Representación gráfica

Es usual interpretar el número complejo $a+ib$ como el vector del plano (a,b) y, en ese sentido, se habla del *plano complejo*. El eje horizontal recibe el nombre de *eje real*, y el eje vertical recibe el nombre de *eje imaginario*.



Si $z=a+ib$ es un número complejo (con a e b reales), entonces el **conjugado** de z se define como $\bar{z}=a-ib$.

El **módulo** o **valor absoluto** de z, se define como:

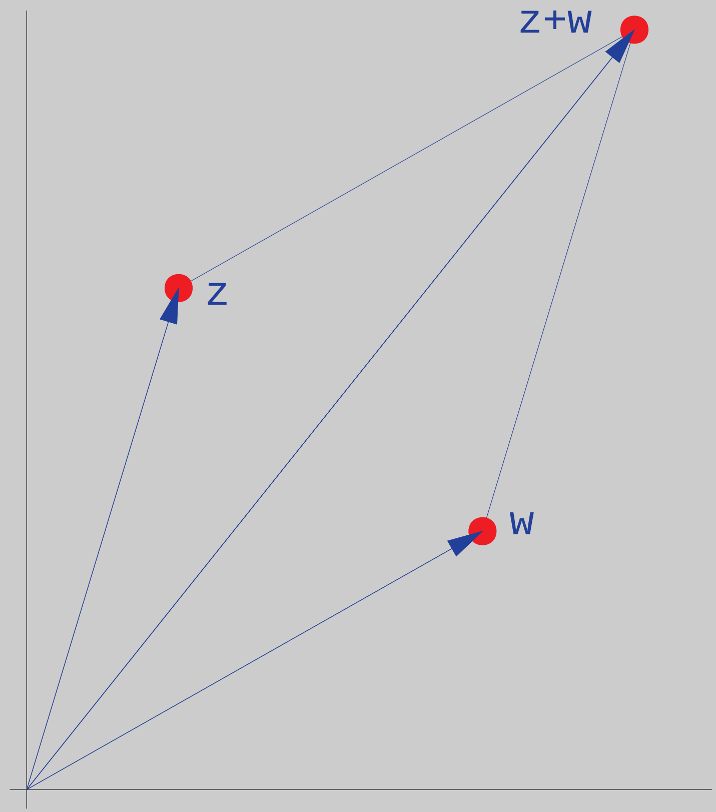
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observa que $\sqrt{a^2+b^2}$ está definido sin ambigüedad; es la raíz cuadrada del número real no negativo a^2+b^2.

Geométricamente $\overline{z}$ es sencillamente la reflexión de z respecto al eje real, mientras que $|z|$ es la distancia euclídea del punto (a,b) a $(0,0)$ o, también, la longitud o norma euclídea del vector (a,b). La **distancia** entre dos números complejos z y w se define como $|z-w|$.

Representación gráfica de la suma

Dos números complejos $z = a + ib$ y $w = c + id$ determinan un paralelogramo cuya diagonal es $z + w$.



Forma polar de un número complejo

El uso de coordenadas polares en el plano facilita mucho los cálculos con productos de números complejos. Para cualquier número complejo $z = x + iy \neq 0$ podemos escribir

$$z = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right)$$

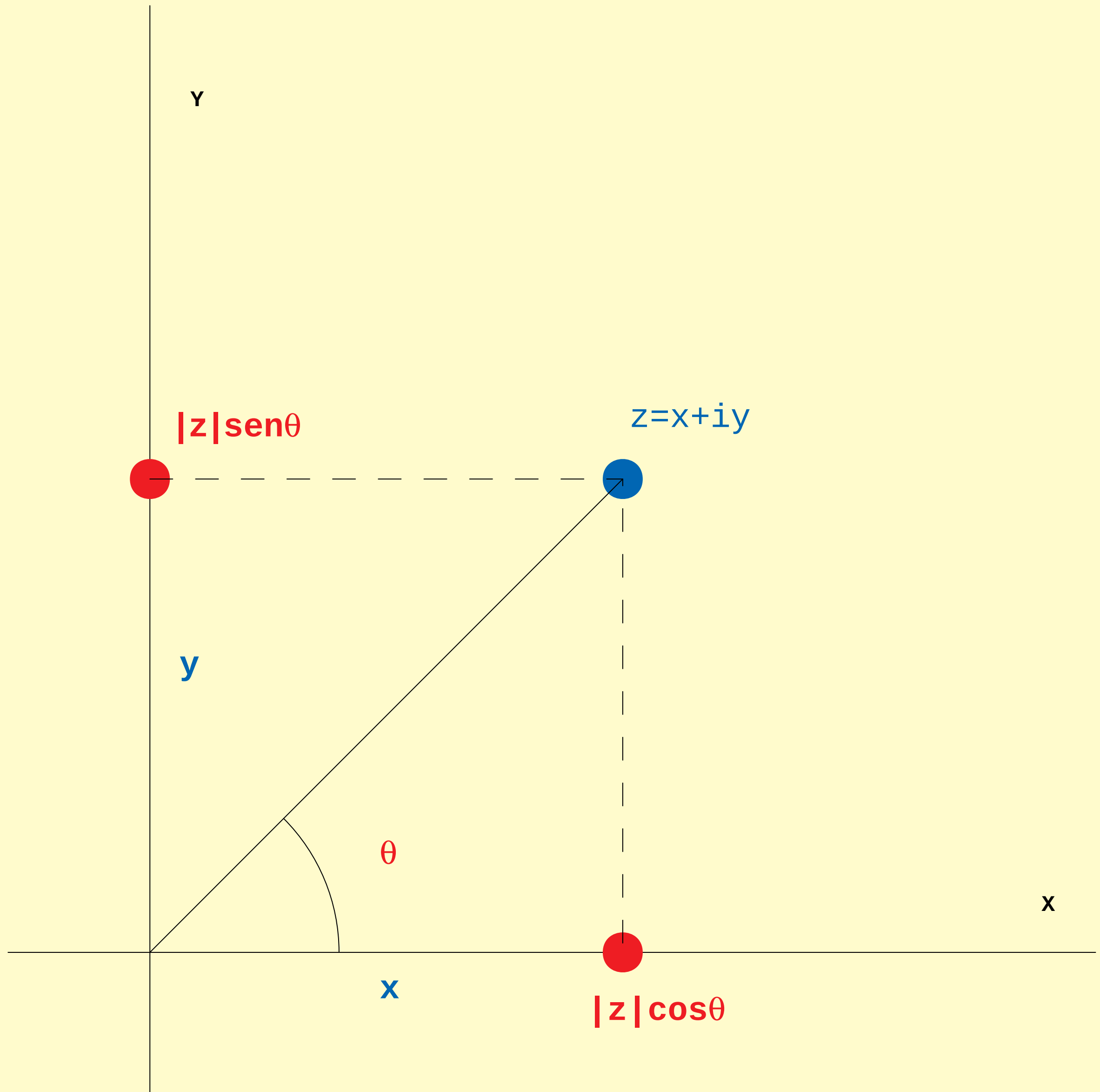
Como $\left(\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|} \right)$ es un punto de la circunferencia unidad, puede escribirse en la forma

$$\left(\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|} \right) = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$$

para algún número $\vartheta \in \mathbb{R}$. Resulta así que

$$z = |z| \left(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta \right)$$

Esta forma de expresar un número complejo recibe el nombre de **forma polar**, cuya interpretación gráfica vemos en la figura.


Y
|z|senθ
z=x+iy
y
θ
X
x
|z|cosθ

Argumentos de un número complejo

$$\operatorname{Arg}(z) = \{t \in \mathbb{R} : z = |z|\,(\cos t + i \operatorname{sen} t)\}$$

Observa que

$$s, t \in \operatorname{Arg}(z) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \cos(t) = \cos(s) \\ \sin(t) = \sin(s) \end{array} \right\} \Longleftrightarrow s = t + 2k\pi \ \text{ para algún } \ k \in \mathbb{Z}$$

Por tanto, conocido un argumento $t_o \in \operatorname{Arg}(z)$ cualquier otro es de la forma $t_o + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, es decir, $\operatorname{Arg}(z) = t_o + 2\pi\mathbb{Z}$.

Es claro que dos números complejos, z, w, son iguales si, y sólo si, tienen el mismo módulo y $\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} w$.

De entre todos los argumentos de un número complejo $z \neq 0$ hay uno único que se encuentra en el intervalo $]-\pi,\pi]$, se representa por $\arg(z)$ y viene dado por:

$$\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}(y/x) - \pi & \text{si } y < 0, x < 0 \\ -\pi/2 & \text{si } y \leqslant 0, x = 0 \\ \operatorname{arc\,tg}(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \pi/2 & \text{si } y > 0, x = 0 \\ \operatorname{arc\,tg}(y/x) + \pi & \text{si } y \geqslant 0, x < 0 \end{cases}$$

Veamos cómo la forma polar permite hacer fácilmente productos de números complejos. Consideremos dos números complejos no nulos

$$z = |z|\,(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)$$
$$w = |w|\,(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$$

Entonces

$$\begin{aligned} zw &= |z|\,|w|\,(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) = \\ &= |zw|\,[(\cos\vartheta\cos\varphi - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi) + i(\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta\operatorname{sen}\varphi)] = \\ &= |zw|\,(\cos(\vartheta+\varphi) + i\operatorname{sen}(\vartheta+\varphi)) \end{aligned}$$

Es decir: *para multiplicar dos números complejos se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos.* Por ejemplo, para calcular $(1+i)^4$ como $|1+i| = \sqrt{2}$ y $\arg(1+i) = \pi/4$, se sigue que $(1+i)^4 = -4$.

Así pues, el producto de dos números complejos es geométricamente un giro (pues se suman los argumentos de los números que estamos multiplicando) seguido de una homotecia (el producto de los módulos de ambos números).

Fórmula de De Moivre

Acabamos de ver que si $z, w \in \mathbb{C}^*$, $\vartheta \in \operatorname{Arg}(z)$ y $\varphi \in \operatorname{Arg}(w)$, entonces $\vartheta + \varphi \in \operatorname{Arg}(zw)$. Es ahora fácil demostrar mediante inducción la siguiente fórmula, muy útil, conocida como fórmula de *De Moivre*.

Si z es un complejo no nulo y ϑ es un argumento de z, entonces se verifica que $n\vartheta$ es un argumento de z^n:

$$z^n = \big(|z|\,(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)\big)^n = |z|^n\,(\cos n\vartheta + i \operatorname{sen} n\vartheta)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Raíces de un número complejo

Se trata ahora de resolver la ecuación $w^n = z$ donde n es un número natural, $n \geqslant 2$, y $z \neq 0$ es un número complejo conocido. Escribamos w en forma polar:

$$w = |w|\,(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$$

Ahora, usando la fórmula de De Moivre, podemos escribir la ecuación $w^n = z$ en la forma equivalente:

$$w^n = |w|^n\,(\cos n\varphi + i\operatorname{sen} n\varphi) = |z|\,(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)$$

Esta igualdad se da cuando $|w|^n = |z|$ y $n\varphi = \vartheta + 2k\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$. Deducimos que $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ (ojo: se trata de la raíz n–ésima de un número positivo, cosa ya conocida). Ahora bien, para cualquier número φ_k de la forma $\varphi_k = (\vartheta + 2k\pi)/n$ tenemos un número complejo

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\varphi_k + i\operatorname{sen}\varphi_k)$$

tal que $(w_k)^n = z$.

Como una ecuación polinómica de grado n no puede tener más de n soluciones, se sigue que distintos valores de k deben dar lugar al mismo número w_k. Veamos:

$$w_k = w_q \Leftrightarrow \varphi_k - \varphi_q = 2m\pi \Leftrightarrow k - q = nm$$

Es decir, k y q dan el mismo resto al dividirlos por n. Deducimos que para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ obtenemos w_k distintos y cualquier otro w_q es igual a uno de ellos. Por tanto hay n raíces n–ésimas distintas de z.

De entre todas las raíces n–ésimas de z vamos a designar con el símbolo $\sqrt[n]{z}$ a la *raíz n-ésima principal*, que está definida por

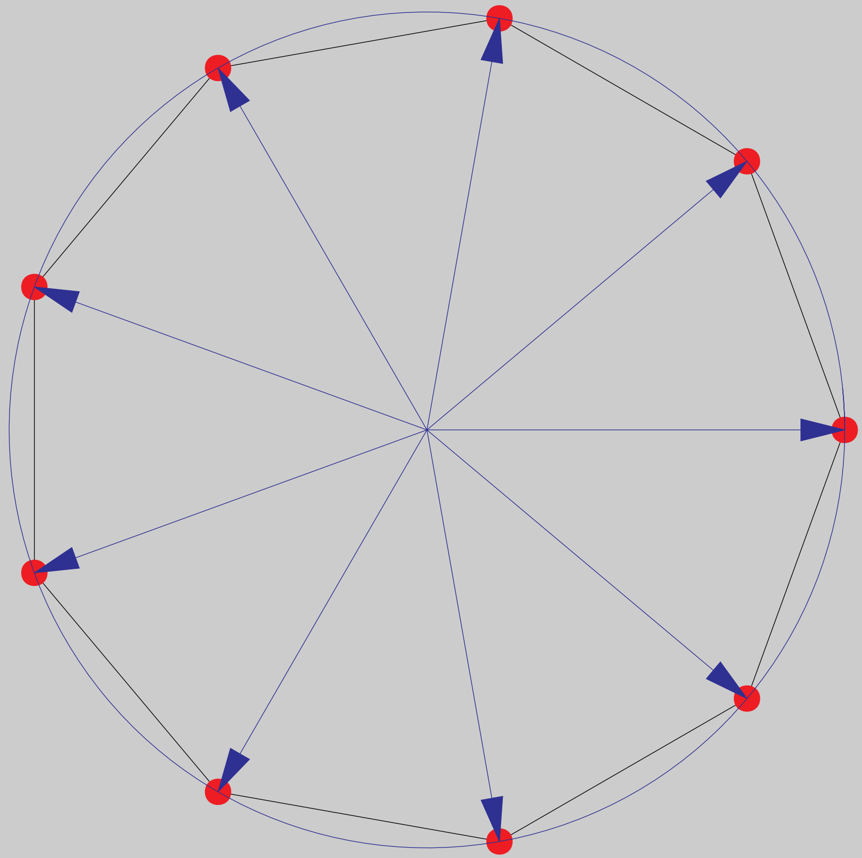
$$\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\arg z}{n}\right)$$

Observa que en el caso particular de que z sea un número real positivo, entonces la raíz principal de z (considerado como número complejo) coincide con la raíz de z (considerado como número real positivo).

Hemos obtenido que las raíces n–ésimas de z vienen dadas por

$$z_k = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Si representamos todas las raíces n–ésimas de z obtenemos n puntos sobre una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt[n]{|z|}$ que forman un polígono regular de n lados. Aquí puedes ver representadas las raíces octavas de la unidad.



Veamos cuándo se verifica la igualdad $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$.

Como los números $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w}$ y $\sqrt[n]{zw}$ tienen igual módulo, $\sqrt[n]{|zw|}$, la igualdad

$$\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$$

equivale a que para algún entero k se verifique que

$$\frac{\arg(z)}{n} + \frac{\arg(w)}{n} = \frac{\arg(zw)}{n} + 2k\pi$$

es decir, $\arg(z) + \arg(w) = \arg(zw) + 2kn\pi$. Como $n \geqslant 2$ y

$$-2\pi < \arg(z) + \arg(w) \leqslant 2\pi$$

deducimos que ha de ser $k = 0$ (pues, en otro caso, $|2kn\pi| \geqslant 4\pi$ y no puede darse la igualdad). Luego, debe ocurrir que $\arg(z) + \arg(w) = \arg(zw)$ lo que equivale a que $-\pi < \arg(z) + \arg(w) \leqslant \pi$. Hemos probado que

$$\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw} \Longleftrightarrow -\pi < \arg(z) + \arg(w) \leqslant \pi$$

Por ejemplo, si los números z y w están en el semiplano de la derecha, es decir, $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re} w > 0$, entonces $-\pi/2 < \arg(z) < \pi/2$ y $-\pi/2 < \arg(w) < \pi/2$; por tanto $\arg(z) + \arg(w) = \arg(zw)$ por lo que, en este caso, $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$.

En el caso en que $n = 2$, $z = w = -1$, tenemos que

$$\arg(-1) + \arg(-1) = 2\pi \neq 0 = \arg(1) = \arg\big((-1)(-1)\big)$$

y no se cumple la condición anterior. En este caso

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1 \neq 1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)}$$

es decir $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$ es una raíz cuadrada de $1 = (-1)(-1)$ pero no es la raíz cuadrada principal de 1.

Topología del plano complejo

Como conjunto, $\mathbb{C}$ no es otra cosa que $\mathbb{R}^2$, por tanto, dar una topología en $\mathbb{C}$ es lo mismo que dar una topología en $\mathbb{R}^2$. Pues bien, consideraremos en $\mathbb{C}$ la topología usual en $\mathbb{R}^2$, es decir, la asociada a la norma euclídea. Escribiendo la norma en términos de $\mathbb{C}$, ésta viene dada por

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Mientras que la distancia euclídea en $\mathbb{C}$ viene dada por $(z,w) \mapsto |z-w| \;\; z,w \in \mathbb{C}$.

En $\mathbb{C}$ suele usarse la siguiente terminología. Dados $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, el conjunto

$$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$$

se llama *disco abierto* de centro a y radio r. Observa que un disco abierto no puede ser vacío.

Dados $a \in \mathbb{C}$ y $r \geqslant 0$, el conjunto

$$\overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leqslant r\},$$

se llama *disco cerrado* de centro a y radio r. Observa que $\overline{D}(a,0) = \{a\}$.

Representaremos por

$$C(a,r)^* = \{z \in C : |z-a| = r\}$$

la circunferencia de centro $a \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$.

Un conjunto se llama **acotado** si está contenido en algún disco centrado en el origen. Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que es un conjunto **abierto** si todo punto de Ω es centro de algún disco abierto contenido en Ω. Por convenio el conjunto vacío se considera abierto. Un conjunto se llama **cerrado** si su complementario es abierto. Un conjunto abierto no vacío con la propiedad de que dos puntos cualesquiera del mismo pueden unirse por una curva sin salirse del conjunto se llama un **dominio**. Un conjunto cerrado y acotado se llama un conjunto **compacto**.

Sucesiones de números complejos

Una sucesión de números complejos es una aplicación del conjunto de los números naturales en $\mathbb{C}$. Como de costumbre, representaremos por $\{z_n\}$ la sucesión dada por $n \mapsto z_n$ donde $z_n \in \mathbb{C}$. La definición de sucesión convergente es exactamente la misma que para sucesiones reales.

Definición. La sucesión de números complejos $\{z_n\}$ converge a un número complejo z si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que $|z_n - z| < \varepsilon$. Equivalentemente, $\{z_n\}$ converge a z si $|z_n - z| \to 0$.

Recordemos que $\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$. Gracias a esta desigualdad tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \\ |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \end{array}\right\} \leqslant |z_n - z| \leqslant |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z|$$

Deducimos que $|z_n - z| \to 0$ si, y sólo si, $|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \to 0$ y $|\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \to 0$. Hemos probado el siguiente resultado.

Proposición. Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es convergente si, y sólo si, las sucesiones de números reales $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ son convergentes. Además en dicho caso

$$\lim\{z_n\} = z \Longleftrightarrow \operatorname{Re} z = \lim\{\operatorname{Re} z_n\} \quad \text{y} \quad \operatorname{Im} z = \lim\{\operatorname{Im} z_n\}$$

Gracias a este resultado el estudio de sucesiones de números complejos se reduce a estudiar la convergencia de dos sucesiones de números reales.

Supongamos que $\{z_n\}$ es una sucesión tal que para todo $K > 0$ existe un número natural $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que si $n \geqslant n_0$ entonces $|z_n| \geqslant K$. En dicho caso diremos que la sucesión $\{z_n\}$ es divergente o que **diverge** y escribiremos $\{z_n\} \to \infty$.

Los resultados que conoces para sucesiones de números reales en los que no interviene el orden son también válidos para sucesiones de números complejos. Destacamos entre ellos los más importantes.

Álgebra de límites.

- Si $\{z_n\} \to z$ y $\{w_n\} \to w$, entonces $\{z_n + w_n\} \to z + w$ y $\{z_n w_n\} \to zw$. Además, si $z_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $z \neq 0$, entonces $\{\frac{1}{z_n}\} \to \frac{1}{z}$.
- Si $\{z_n\}$ diverge y $\{w_n\}$ está acotada entonces $\{z_n + w_n\}$ diverge.
- Si $\{z_n\}$ diverge y $\{w_n\}$ está separada de 0, esto es, existe $\rho > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que para $n \geqslant n_0$ se cumple $|w_n| \geqslant \rho$, entonces $\{z_n w_n\}$ diverge.

Teorema de Bolzano–Weierstrass. Toda sucesión acotada de números complejos tiene alguna sucesión parcial convergente.

Definición. Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ se dice que es de Cauchy si para cada número positivo $\varepsilon > 0$ existe un número natural $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que si $p, q \geqslant n_0$ entonces $|z_p - z_q| < \varepsilon$.

Teorema de complitud. Toda sucesión de Cauchy de números complejos es convergente.

Series de números complejos

Dada una sucesión, $\{z_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{S_n\}$, cuyos términos se obtienen *sumando consecutivamente* los términos de $\{z_n\}$, es decir:

$$S_1 = z_1,\ S_2 = z_1 + z_2,\ S_3 = z_1 + z_2 + z_3, \ldots, S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

La sucesión, $\{S_n\}$, así obtenida se llama *serie de término general* z_n y se representa por $\sum\limits_{n\geqslant 1} z_n$. Si una serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} z_n$ es convergente su límite se llamar *suma de la serie* y es el número complejo definido por

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \text{lím}\{S_n\} = \text{lím} \sum_{k=1}^{n} z_k$$

La serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} z_n$ converge si, y sólo si, las series $\sum\limits_{n\geqslant 1} \operatorname{Re} z_n$ y $\sum\limits_{n\geqslant 1} \operatorname{Im} z_n$ son convergentes.

Proposición. Condición necesaria para que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} z_n$ sea convergente es que $\text{lím}\{z_n\} = 0$.

Convergencia absoluta.

Definición. Se dice que una serie de números complejos $\sum\limits_{n\geqslant 1} z_n$ converge absolutamente si la serie de números reales positivos $\sum\limits_{n\geqslant 1} |z_n|$ es convergente.

Proposición. Si una serie de números complejos es absolutamente convergente entonces dicha serie también es convergente.

El siguiente resultado pone de manifiesto que el concepto de convergencia absoluta de una serie es mucho más fuerte que el de convergencia.

Teorema de Riemann. La serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} z_n$ converge absolutamente si, y sólo si, para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} z_{\pi(n)}$ es convergente. Además, en tal caso se verifica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi(n)}$$

Criterios de convergencia no absoluta para series. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales y $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos.

Criterio de Dirichlet. Si $\{a_n\}$ es monótona y converge a cero y la serie $\sum z_n$ tiene sumas parciales acotadas, entonces $\sum a_n z_n$ converge.

Criterio de Abel. Si $\{a_n\}$ es monótona y acotada y la serie $\sum z_n$ converge, entonces $\sum a_n z_n$ es convergente.

Funciones complejas

Las funciones complejas no son más que las funciones definidas en subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ con valores en $\mathbb{R}^2$ cuando en $\mathbb{R}^2$ consideramos su estructura compleja. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, a toda función compleja $f : A \to \mathbb{C}$ se le asocian dos funciones reales: la función $u = \operatorname{Re} f$ "parte real de f" y la función $v = \operatorname{Im} f$ "parte imaginaria de f" definidas para todo $(x,y) = x+iy \in A$ por:

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy), \quad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$$

Naturalmente, $f(z) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z)$.

La **función conjugada** de f es la función $\overline{f}$ definida por

$$\overline{f}(z) = \operatorname{Re} f(z) - i \operatorname{Im} f(z)$$

La **función módulo** de f es la función $|f|$ definida por

$$|f|(z) = |f(z)|$$

Continuidad

Definición. Se dice que la función $f : A \to \mathbb{C}$ es continua en un punto $a \in A$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} z \in A \\ |z-a| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon.$$

Usando una vez más las desigualdades

$$\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

se prueba fácilmente que una función compleja f es continua en a si, y sólo si, las funciones $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$ son continuas en a.

Límite funcional

Definición. Dado un punto a de acumulación de A, se dice $f : A \to \mathbb{C}$ tiene límite en a si hay un número complejo $L \in \mathbb{C}$ con la propiedad de que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} z \in A \\ 0 < |z - a| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{z\to a} f(z) = L$.

Usando las desigualdades anteriores y llamando $a = \alpha + i\beta$, $L = \lambda + i\mu$ tenemos

$$\lim_{z\to a} f(z) = L \iff \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \operatorname{Re} f(x,y) = \lambda \\ \lim\limits_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \operatorname{Im} f(x,y) = \mu \end{cases}$$

Se dice que $f : A \to \mathbb{C}$ tiene límite en infinito si hay un número complejo $L \in \mathbb{C}$ con la propiedad de que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $K > 0$ tal que si $|z| > K$ entonces $|f(z) - L| < \varepsilon$. Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = L$.

Se dice que $f : A \to \mathbb{C}$ tiene límite infinito en infinito si para todo $M > 0$ existe $K > 0$ tal que si $|z| > K$ entonces $|f(z)| > M$. Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$.

Se dice que $f : A \to \mathbb{C}$ tiene límite infinito en un punto a de acumulación de A si para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} z \in A \\ 0 < |z - \alpha| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(z)| > M$$

Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$.

Derivada de una función compleja

Definición. Sea $f : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $a \in A \cap A'$. Se dice que f es derivable en a cuando existe el límite

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \in \mathbb{C}$$

el valor de dicho límite se llama **derivada de f en el punto** a, y se representa por $f'(a)$.

La única novedad de la definición es que se está utilizando el producto complejo y eso, como veremos, hace que la condición de derivabilidad en sentido complejo sea mucho más fuerte que la derivabilidad para funciones reales.

Reglas de derivación. Sean dos funciones $f,g : A \to \mathbb{C}$ con $A \subseteq \mathbb{C}$ y $a \in A \cap A'$. Supongamos que f y g son derivables en a. Entonces:

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
- Si $g(z) \neq 0$ para todo $z \in A$ entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{\big(g(a)\big)^2}$$

- **Regla de la cadena**. Dadas $f : A \to \mathbb{C}$ y $g : B \to \mathbb{C}$ tales que $A, B \subseteq \mathbb{C}$ y $f(A) \subseteq B$, podemos considerar la función compuesta $h = g \circ f : A \to \mathbb{C}$.

  Si suponemos que f es derivable en $a \in A \cap A'$ y que g es derivable en $b = f(a) \in B \cap B'$ entonces h es derivable en a y

$$h'(a) = g'\big(f(a)\big) f'(a) = g'(b) f'(a)$$

Relación ente la derivabilidad compleja y la diferenciabilidad real.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, a un punto de Ω y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función de Ω en $\mathbb{C}$. Notemos $a = \alpha + i\beta$, $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy) \quad (x+iy \in A)$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

i) f es derivable (en sentido complejo) en $a = \alpha + i\beta$.

ii) Las funciones $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$ son diferenciables en (α,β) y además

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,\beta) &= \frac{\partial v}{\partial y}(\alpha,\beta) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha,\beta) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(\alpha,\beta) \end{aligned}\right\} \text{Ecuaciones de Cauchy–Riemann}$$

En caso de que se cumplan i) y ii) se tiene

$$f'(a) = f'(\alpha+i\beta) = \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,\beta) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\alpha,\beta)$$

Funciones holomorfas

Definición. Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$. Una función $f:\Omega\to\mathbb{C}$ se dice que es **holomorfa** en Ω si f es derivable en todo punto de Ω.

Ejemplos

- Las funciones polinómicas, es decir, las funciones de la forma

  $$p(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n$$

  son funciones enteras. La función derivada de p viene dada por

  $$p'(z)=c_1+2c_2z+3c_3z^2+\cdots+nc_nz^{n-1} \qquad (z\in\mathbb{C})$$

- Las funciones racionales, es decir, las funciones de la forma $R(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$ donde $p(z)$ y $q(z)$ son funciones polinómicas, son holomorfas en su dominio natural de definición $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:q(z)\neq 0\}$. La función derivada de R viene dada por

  $$R'(z)=\frac{p'(z)q(z)-p(z)q'(z)}{q(z)^2} \qquad (z\in\Omega)$$

Propiedades de las funciones holomorfas

Como consecuencia de las reglas de derivación tenemos el siguiente resultado.

Proposición. El conjunto $\mathcal{H}(\Omega)$ de las funciones holomorfas en un abierto Ω con la suma y el producto usual de funciones es un álgebra.

Proposición. Una función holomorfa en un dominio cuya derivada es nula en todo punto es constante

Corolario. Si dos funciones holomorfas tienen la misma derivada sobre un dominio y coinciden en un punto son iguales.

Proposición. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

1. $\operatorname{Re} f$ es constante en Ω.
2. $\operatorname{Im} f$ es constante en Ω.
3. La función compleja conjugada de f, $\overline{f}$, es holomorfa en Ω.
4. f es constante en Ω.
5. $|f|$ es constante en Ω.

1. Funciones complejas elementales

1.1. La función exponencial

Una de las formas de definir la exponencial de un número real x es mediante el límite

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Por tanto, una forma coherente de definir la exponencial de un número complejo sería calcular el anterior límite para $z \in \mathbb{C}$. Llamemos $z = x + iy$. Consideraremos que $y \neq 0$, puesto que si $y = 0$ tendríamos que $z = x$ sería un número real. Pongamos $w_n = 1 + z/n$ y

$$\varphi_n = \operatorname{arc\,tg}\frac{y/n}{1+x/n}$$

Sea n_o tal que para $n \geqslant n_o$ se verifique que $\operatorname{Re}(w_n) > 0$. Entonces, para $n \geqslant n_o$ resulta que $\varphi_n = \arg(w_n)$. Por otra parte, el módulo de w_n viene dado por

$$|w_n|^2 = \left|1+\frac{z}{n}\right|^2 = \left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}$$

Tenemos ahora, gracias a la fórmula de De Moivre que

$$(w_n)^n = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2} (\cos(n\varphi_n) + i\operatorname{sen}(n\varphi_n))$$

Pero, por el criterio de equivalencia logarítmica, es

$$\lim |w_n|^n = \lim \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2} = \exp\left(\lim \frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n} + \frac{x^2}{n^2} + \frac{y^2}{n^2}\right)\right) = \mathrm{e}^x$$

Además, la sucesión $\{\varphi_n\}$ es asintóticamente equivalente a $\left\{\dfrac{y/n}{1+x/n}\right\}$. Por tanto

$$\lim\{n\varphi_n\} = \lim\{n\frac{y/n}{1+x/n}\} = y$$

En consecuencia, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}(w_n)^n = \lim_{n\to\infty}|w_n|^n \left(\cos(n\varphi_n) + i\operatorname{sen}(n\varphi_n)\right) = \mathrm{e}^x(\cos y + i\operatorname{sen} y)$$

Definimos, por tanto, la exponencial compleja como

$$\mathrm{e}^z = \exp z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}(\cos(\operatorname{Im} z) + i\operatorname{sen}(\operatorname{Im} z))$$

Observa que

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Im} z \in \operatorname{Arg}(e^z)$$

En particular, obtenemos la llamada *fórmula de Euler*:

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t \qquad (\text{para todo } t \in \mathbb{R})$$

que establece una relación entre la exponencial compleja y las funciones trigonométricas. Haciendo $t = \pi$ tenemos la singular igualdad

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

en la que intervienen los números más importantes de las matemáticas.

De la fórmula de Euler se deducen fácilmente las llamadas *ecuaciones de Euler*:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann se deduce que la función exponencial es una función entera y $\exp'(z) = \exp(z)$. Se prueba fácilmente que $e^{z+w} = e^z e^w$ para todos $z, w \in \mathbb{C}$. Se deduce que para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $k \in \mathbb{Z}$ es

$$e^z = e^{z+2k\pi i}$$

Lo que nos dice que la exponencial compleja es una función **periódica** con período $2\pi i$. Naturalmente, esto supone una gran diferencia con la exponencial real que es una función inyectiva. Observa que la exponencial no se anula nunca pues $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} > 0$.

1.2. Logaritmos complejos

El comportamiento periódico de la exponencial compleja se va a traducir, como vamos a ver enseguida, en que la ecuación $e^w = z$, donde z es un número complejo no cero, va a tener infinitas soluciones $w \in \mathbb{C}$. Como

$$e^w = e^{\operatorname{Re} w}\big(\cos(\operatorname{Im} w) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} w)\big)$$

Para que $e^w = z$ es necesario y suficiente que:

1. $|e^w| = |z|$, esto es, $e^{\operatorname{Re} w} = |z|$, es decir, $\operatorname{Re} w = \log|z|$ (logaritmo natural del número real positivo $|z|$).
2. $\operatorname{Arg}(e^w) = \operatorname{Arg}(z)$, esto es, $\operatorname{Im} w \in \operatorname{Arg} z$ y esto se cumple si, y sólo si $\operatorname{Im} w = \arg(w) + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Hemos probado que

$$\{w \in \mathbb{C} : \mathrm{e}^w = z\} = \{\log|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$$

Por tanto, existen infinitos números complejos w que satisfacen la ecuación $\mathrm{e}^w = z$. Cualquiera de ellos se llama **un logaritmo** de z. El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\operatorname{Log} z$. De entre todos ellos elegimos uno, llamado **logaritmo principal**, definido por

$$\log z = \log|z| + i\arg(z) \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}^*$$

Observa que cualquier otro logaritmo de z es de la forma $\log(z) + i2k\pi$ para algún entero k. Es importante que observes que la igualdad

$$\log zw = \log z + \log w$$

que es válida para los logaritmos de los números reales positivos, no es siempre cierta cierta para números complejos. Por ejemplo:

$$\log(-1+i\sqrt{3}) = \log 2 + i\frac{2\pi}{3}$$
$$\log(-\sqrt{3}+i) = \log 2 + i\frac{5\pi}{6}$$
$$\log((-1+i\sqrt{3})(-\sqrt{3}+i)) = \log 4 + i\frac{3\pi}{2}$$

Lo que está claro es que el número $\log z + \log w \in \operatorname{Log}(zw)$, es decir, $\log z + \log w$ es **un** logaritmo de zw pero no tiene por qué ser el logaritmo **principal** de zw.

Como la función $z \to \arg z$ es continua en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_o^-$ y discontinua en $\mathbb{R}_o^-$, se deduce que el logaritmo principal es discontinuo en $\mathbb{R}_o^-$ y continuo en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_o^-$. De hecho, el logaritmo principal es una función holomorfa en el dominio $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_o^-$ y $\log'(z) = \dfrac{1}{z}$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_o^-$. Esto puedes probarlo usando las condiciones de Cauchy-Riemann.

1.3. Potencias complejas

Recuerda que dados dos números reales $a>0$ y $b\in\mathbb{R}$, la potencia de base a y exponente b se define como $a^b = e^{b\log a}$. Ahora, dados $a,b\in\mathbb{C}$, con $a\neq 0$, sabemos que hay infinitos logaritmos de a, todos ellos son de la forma $\log a + i2k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$. Por ello, cualquier número complejo de la forma $\mathrm{e}^{b(\log a+i2k\pi)}$ donde $k\in\mathbb{Z}$, es **una** potencia de base a y exponente b. De todas ellas se destaca una:

$$a^b = \mathrm{e}^{b\log a}$$

y dicho número se llama **valor principal** de la potencia de base a y exponente b. Observa que si $b=1/n$ donde $n\in\mathbb{N}$, el número

$$a^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\log a\right) = \exp\left(\frac{\log a}{n} + i\frac{\arg a}{n}\right) = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg a}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\arg a}{n}\right)$$

es el valor principal de la raíz n-ésima de a que antes hemos notado por $\sqrt[n]{a}$.

La definición anterior da lugar a las funciones exponenciales complejas de base a, $z\longmapsto a^z$, definidas por $a^z = \exp(z\log a)$ que son holomorfas en todo el plano.

Por otro lado la función potencia compleja de exponente b, $z \longmapsto z^b$, definida por $z^b = \exp(b \log z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_o^-$.

Las funciones exponenciales cumplen la igualdad $a^{z+w} = a^z a^w$ pero las funciones potencias no cumplen, en general como vimos al estudiar las raíces, la propiedad $(zw)^b = z^b w^b$. Esta igualdad se da en el caso de que

$$\exp(b \log(zw)) = \exp(b \log z + b \log w)$$

equivalentemente, puesto que la función $\exp$ es periódica de periodo $2\pi i$, cuando se verifique que

$$b \log(zw) = b \log z + b \log w + 2k\pi i, \qquad \text{para algún } k \in \mathbb{Z}$$

Como caso particular, cuando z y w pertenecen al semiplano de la derecha la igualdad $\log(zw) = \log z + \log w$ es cierta con lo cual lo anterior se cumple para $k = 0$. Por los mismos motivos la igualdad $(z^b)^c = z^{bc}$ no es cierta en general.

1.4. Funciones trigonométricas complejas

1.4.1. Seno y coseno complejos

Las ecuaciones de Euler:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

válidas para todo $t \in \mathbb{R}$, también tienen sentido para números complejos. Por ello, para todo $z \in \mathbb{C}$ definimos el coseno y el seno complejos por:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Es inmediato que el seno y coseno complejos extienden a las funciones seno y coseno reales.

Puesto que el coseno y el seno complejos está definidos como combinación de exponenciales sus propiedades se deducen fácilmente a partir de las propiedades de la exponencial.

1. Identidad fundamental $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$
2. $\cos(-z) = \cos(z)$, $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$

3. Fórmulas de adición

$$\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \operatorname{sen} w \cos z$$

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w + \operatorname{sen} w \operatorname{sen} z$$

4. Las funciones seno y coseno son derivables en todo $\mathbb{C}$ con $\operatorname{sen}' z = \cos z$, $\cos' z = -\operatorname{sen} z$

5. Relación con las funciones hiperbólicas. Recordando que las funciones hiperbólicas $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$ se definen por:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Es de comprobación inmediata que:

$$\cosh x = \cos(ix) \qquad \operatorname{senh}(x) = -i \operatorname{sen}(ix)$$

6. Se cumplen las igualdades

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y \\ \cos z &= \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y \\ |\cos z|^2 &= \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 \\ |\operatorname{sen} z|^2 &= \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 \end{aligned}$$

7. Las funciones seno y coseno complejos no están acotadas, aunque si lo están en bandas acotadas paralelas al eje real.

8. Las funciones seno y coseno complejas no tienen más ceros que los reales, esto es, $\operatorname{sen} z = 0$ si, y sólo si, z es real de la forma $2k\pi$ y $\cos z = 0$ si, y sólo si, z es real de la forma $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

1.4.2. Tangente compleja

Por analogía con la tangente real definimos la función tangente compleja como

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \qquad (\cos z \neq 0)$$

Puesto que el seno y el coseno son funciones enteras la tangente compleja es una función holomorfa en su dominio de definición $\mathbb{C}\setminus\{z : \cos z = 0\}$. Además sabemos que $\cos z = 0$ sólo si z es real de la forma $z = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ para algún $k\in\mathbb{Z}$.

Las propiedades de la tangente se deducen con facilidad de las propiedades del seno y el coseno. Por ejemplo, puedes comprobar que

$$\operatorname{tg}(z+w) = \frac{\operatorname{tg} z + \operatorname{tg} w}{1 - \operatorname{tg} z \operatorname{tg} w}$$

1.5. Funciones trigonométricas inversas

1.5.1. Arcocoseno complejo

Dado un número complejo $z \in \mathbb{C}$ se trata de calcular los complejos w tales que $\cos w = z$.

$$\frac{\mathrm{e}^{iw} + \mathrm{e}^{-iw}}{2} = z \iff \mathrm{e}^{iw} + \mathrm{e}^{-iw} - 2z = 0$$

puesto que $\exp(w) \neq 0$ para cualquier w, podemos multiplicar por e^{iw} la expresión anterior

$$\mathrm{e}^{2iw} - 2z\,\mathrm{e}^{iw} + 1 = 0$$

Poniendo $u = e^{iw}$, la ecuación anterior podemos escribirla $u^2 - 2zu + 1 = 0$, cuyas raíces son

$$u = z \pm \sqrt{z^2 - 1} = z \pm i\sqrt{1 - z^2}$$

Observa que dichas raíces son distintas de 0, de hecho una es inversa de la otra pues su producto es igual a 1. Hemos obtenido que:

$$\exp(iw) = z \pm i\sqrt{1-z^2} \iff iw \in \operatorname{Log}(z \pm i\sqrt{1-z^2}\,) \iff \cos w = z$$

Naturalmente, hay infinitos valores de w que verifican la igualdad anterior. El conjunto de todos ellos se representa por $\operatorname{Arccos} z$.

$$\operatorname{Arccos} z = \frac{1}{i}\operatorname{Log}(z \pm i\sqrt{1-z^2}\,)$$

De todos ellos elegimos el que corresponde al logaritmo principal y le llamamos valor principal de $\operatorname{Arccos} z$ que está definido por:

$$\arccos z = \frac{1}{i}\log(z + i\sqrt{1-z^2}\,)$$

Veamos que el $\arccos z$ extiende al arcocoseno real. En efecto, para $z=x\in[-1,1]$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\log(x+i\sqrt{1-x^2}) &= \frac{1}{i}\left(\log\left|x+i\sqrt{1-x^2}\right|+i\arg(x+i\sqrt{1-x^2})\right) = \\ &= \frac{1}{i}\left(\log 1+i\arg(x+i\sqrt{1-x^2})\right) = \\ &= \arg(x+i\sqrt{1-x^2})\end{aligned}$$

Observemos que $(x,\sqrt{1-x^2})$ es un punto de la mitad superior de la circunferencia unidad y una medida del ángulo que forma el número complejo $x+i\sqrt{1-x^2}$ con el eje real positivo es precisamente el arco cuyo coseno es x. Además, para $x\in[-1,1]$ se tiene que $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$. Deducimos que $\arg(x+i\sqrt{1-x^2})=\arccos x$.

Teniendo en cuenta que $\sqrt{1-z^2}=\exp(\frac{1}{2}\log(1-z^2))$, y que el logaritmo principal es holomorfo en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_o^-$, deducimos, por la regla de la cadena, que la función $z\mapsto\sqrt{1-z^2}$ es holomorfa en el conjunto

$$\Omega=\left\{z\in\mathbb{C}:1-z^2\notin\mathbb{R}_o^-\right\}=\mathbb{C}\setminus\left(]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\right)$$

Análogamente $\log(z+i\sqrt{1-z^2})$ es derivable en el conjunto

$$\Omega_1=\left\{z\in\mathbb{C}: z+i\sqrt{1-z^2}\notin\mathbb{R}_o^-\right\}$$

Como $z+i\sqrt{1-z^2}$ y $z-i\sqrt{1-z^2}$ son inversos, tenemos que

$$z+i\sqrt{1-z^2}\in\mathbb{R}_o^-\Rightarrow z-i\sqrt{1-z^2}\in\mathbb{R}_o^-\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} z\in\mathbb{R}^- \\ \sqrt{1-z^2}\in i\mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow z\in]-\infty,-1]$$

deducimos que $\Omega_1=\mathbb{C}\backslash]-\infty,-1]\supset\Omega$. Luego el arcocoseno es holomorfo en Ω. La regla de la cadena nos permite calcular su derivada

$$\begin{aligned}\arccos' z &= \frac{1}{i}\,\frac{1+i\dfrac{-z}{\sqrt{1-z^2}}}{z+i\sqrt{1-z^2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,\frac{\sqrt{1-z^2}-iz}{iz-\sqrt{1-z^2}}=\frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}\end{aligned}$$

1.5.2. Arcoseno complejo Dado un número complejo z queremos calcular los complejos w tales que $\operatorname{sen} w=z$. El conjunto de tales números lo representaremos por Arcsen. Aunque podemos repetir el mismo proceso anterior, podemos aprovechar lo ya hecho y observar que

$$\operatorname{sen} w = \cos\left(\frac{\pi}{2} - w\right)$$

luego $\operatorname{sen} w = z$ si, y sólo si, $\dfrac{\pi}{2} - w \in \dfrac{1}{i}\operatorname{Log}\left(z \pm i\sqrt{1-z^2}\right)$. Equivalentemente si

$$w \in \frac{\pi}{2} + i\operatorname{Log}\left(z \pm i\sqrt{1-z^2}\right)$$

El valor principal del arcoseno, que notaremos por $\operatorname{arc\,sen} z$, se define eligiendo el logaritmo principal:

$$\operatorname{arc\,sen} z = \frac{\pi}{2} + i\log\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right) \qquad z \in \mathbb{C}$$

y es una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

1.5.3. Arcotangente compleja

Dado $z \in \mathbb{C}$ queremos calcular los números complejos w tales que $z = \operatorname{tg} w$, esto es, $z = \dfrac{\operatorname{sen} w}{\cos w}$ o, lo que es lo mismo, $z\cos w = \operatorname{sen} w$. El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\operatorname{Arctg} z$. Escribiendo la definición de seno y coseno

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z\,\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$

Si $z = \pm i$ la ecuación anterior no tiene solución por lo que consideramos $z \neq \pm i$. Multiplicando por $e^{iw} = u$ la expresión anterior resulta

$$u^2 - 1 = iz(u^2 + 1) \Rightarrow u^2(1 - iz) = 1 + iz$$

puesto que $z \neq -i$ podemos escribir $u^2 = \dfrac{1+iz}{1-iz}$, esto es,

$$e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz} \Longleftrightarrow w \in \frac{1}{2i}\operatorname{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad (z \neq \pm i)$$

Definimos entonces el valor principal de $\operatorname{Arctg} z$ por:

$$\operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad (z \neq \pm i)$$

Puedes probar ahora que la función $\operatorname{arc\,tg} z$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{i\rho : \rho \in \mathbb{R}, |\rho| > 1\}$

Es fácil probar que la función arcotangente compleja, al igual que ocurre con las demás funciones trigonométricas complejas, extiende a la función arcotangente real.